仮想仕事の原理

⑥ 単位仮想荷重法
例題

城戸將江・津田惠吾 2021.08

仕事の原理・エネルギ原理の概観

カスティリアーノ第1定理

最小ポテンシャルエネルギの原理

⑨, ⑩
仮想仕事の原理

③, ④
単位仮想変位法

ダイバージェンスの定理

⑤, ⑥
単位仮想荷重法

⑦, ⑧ 相反定理

線形の
断面力－ひずみ関係
単位（1）の仮想荷重

補仮想仕事の原理

①, ②
構造力学の"構造"

最小コンプリメンタリエネルギの原理

カスティリアーノの第2定理

⑥ 単位仮想荷重法

1) ダイバージェンスの定理で，線形の断面力ーひずみ関係を与える

2) 釣合系　←　単位1の外力を作用

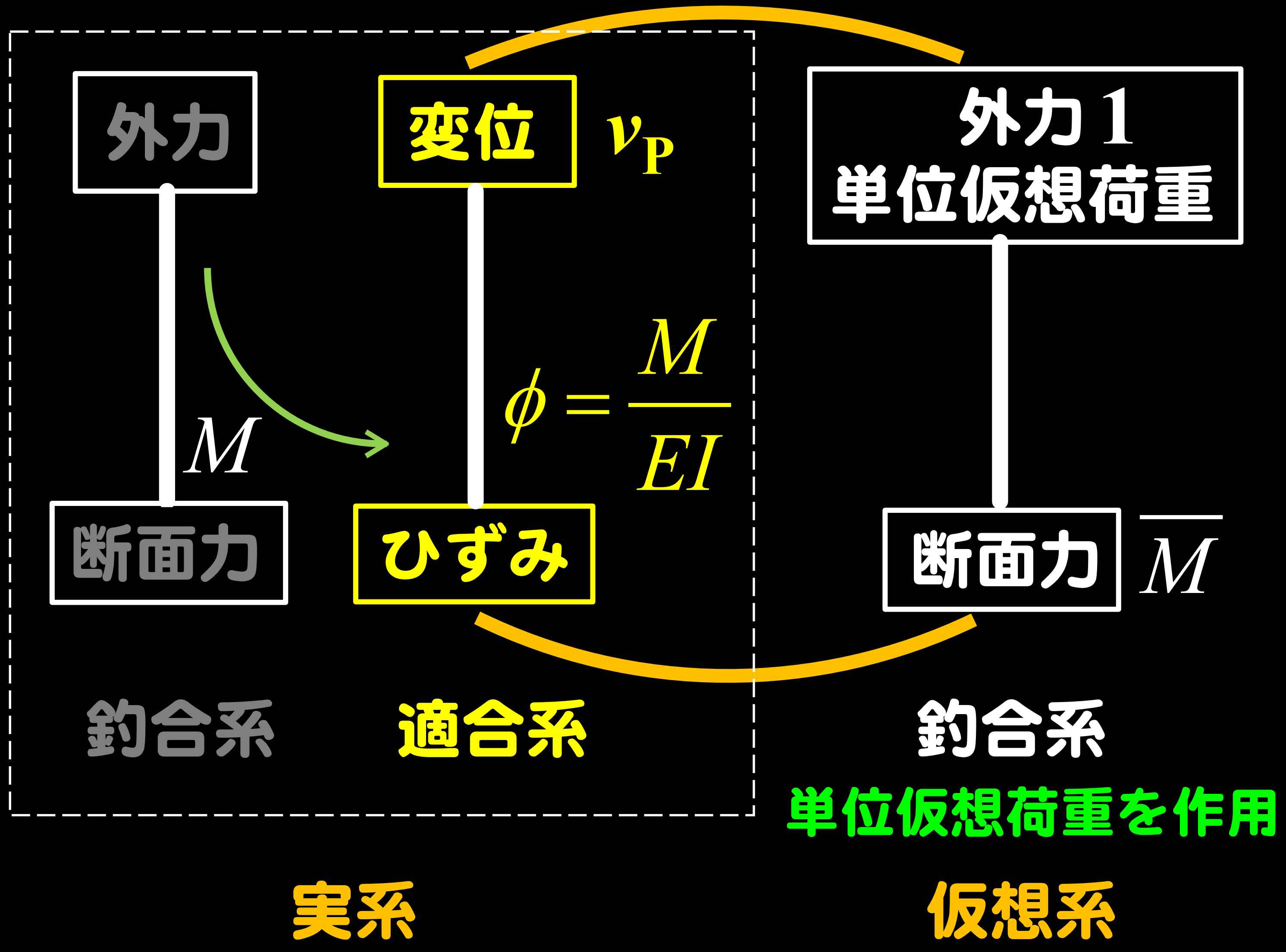
3) 適合系　←　実際の外力による変位

4) ダイバージェンスの定理式

$$\boxed{1 \cdot v_P = \int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x) dx = \int_0^l \overline{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx = \int_0^l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI} dx}$$

釣合系の外力　適合系のたわみ　釣合系の断面力　適合系のひずみ

概要

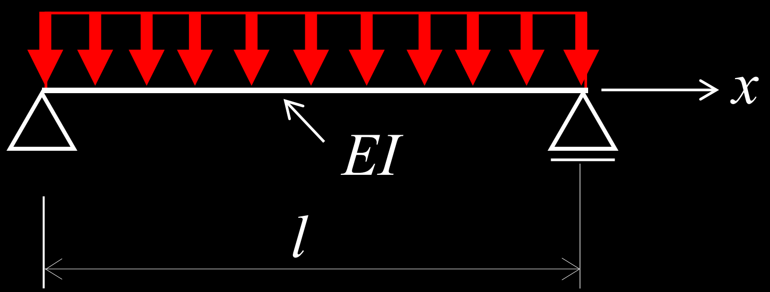


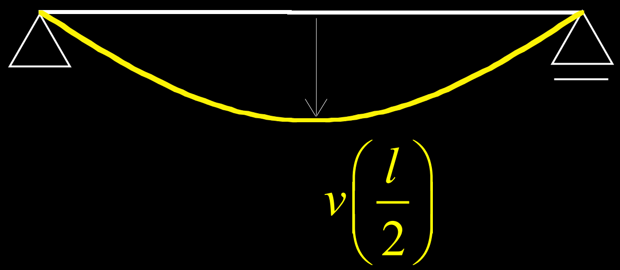
単位仮想荷重法

$$1 \cdot v_p = \int_l \overline{M} \cdot \phi dx = \int_l \frac{M\overline{M}}{EI} dx$$

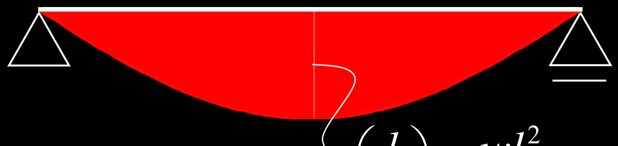
例題1　単位仮想荷重法（たわみの算定）1

等分布荷重





たわみ



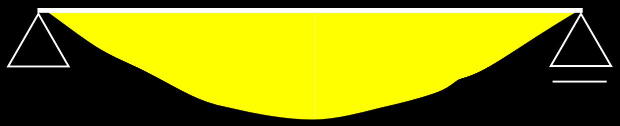
$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{wl^2}{8}$

②例題3

$$M(x)=-EIv''(x)=-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

曲げモーメント図

釣合系

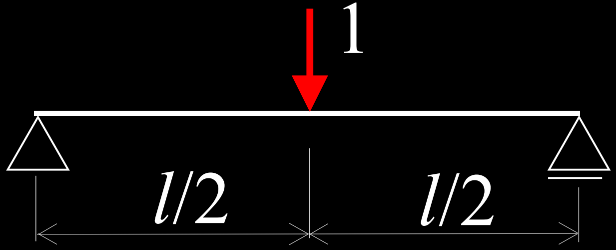


$\phi=\frac{M}{EI}$

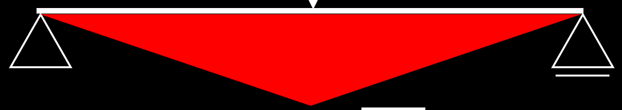
ひずみ

適合系

実系



単位仮想荷重を作用



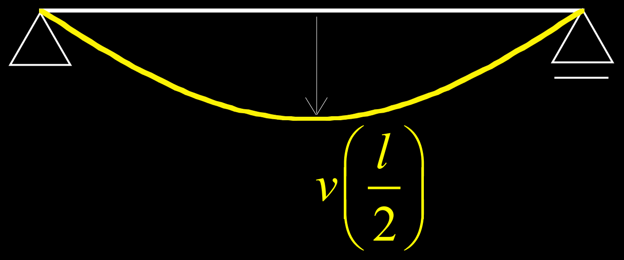
$\overline{M}(x)$

$$\overline{M}(x)=\frac{x}{2}=\frac{l}{2}\cdot\frac{x}{l}\equiv\frac{l}{2}\xi\quad\left(0\le x\le\frac{l}{2}\right)$$

釣合系

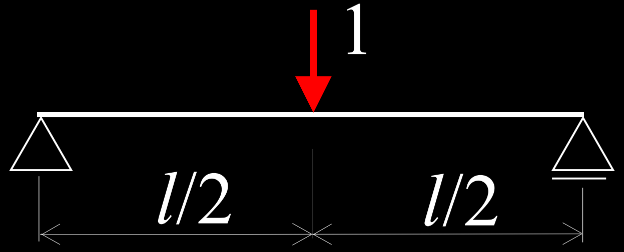
仮想系

例題1　単位仮想荷重法（たわみの算定）2

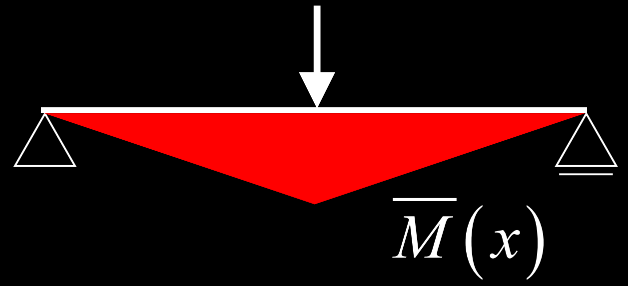


$$M(x) = -\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

適合系
実系



単位仮想荷重を作用



$$\overline{M}(x) = \frac{x}{2} = \frac{l}{2}\cdot\frac{x}{l} \equiv \frac{l}{2}\xi$$

$$\left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

釣合系
仮想系

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \int_0^l \frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left[-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)\right\}\right]\cdot\frac{x}{2}}{EI}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left\{-\frac{wl^2}{2}\left(\xi^2 - \xi\right)\right\}\cdot\frac{l}{2}\xi}{EI}l\,d\xi$$

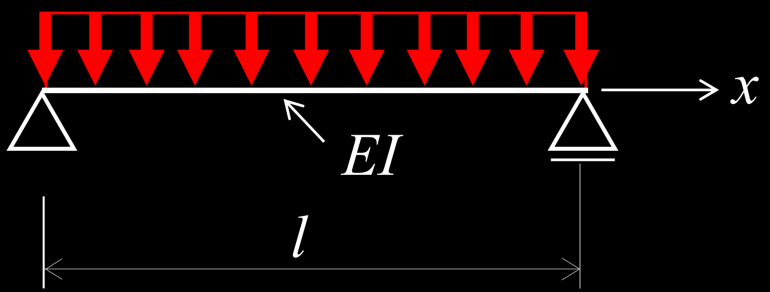
$$= -\frac{wl^4}{2EI}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\xi^3 - \xi^2\right)d\xi = \frac{5wl^4}{384EI}$$

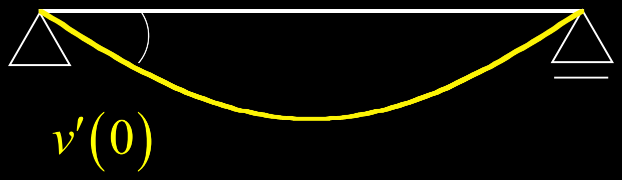
$\boxed{\text{置換積分}}$

$x = l\xi$ とおくと，$dx = l\,d\xi$
$0 \leqq x \leqq l$　で　$0 \leqq \xi \leqq 1$

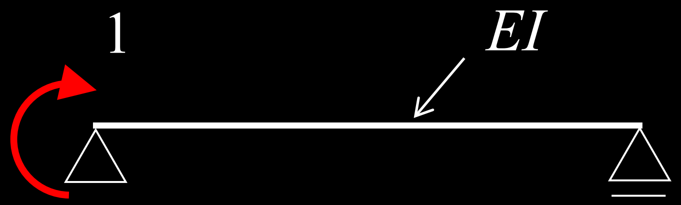
例題2　単位仮想荷重法（たわみ角の算定）1

等分布荷重

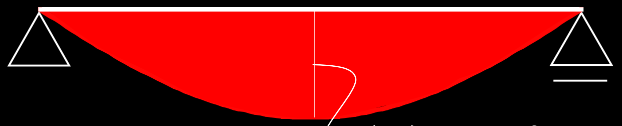




たわみ



単位仮想荷重を作用



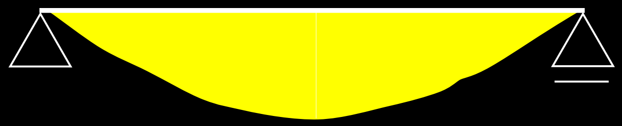
$$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{wl^2}{8}$$

②例題3

$$M(x)=-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

曲げモーメント図

釣合系

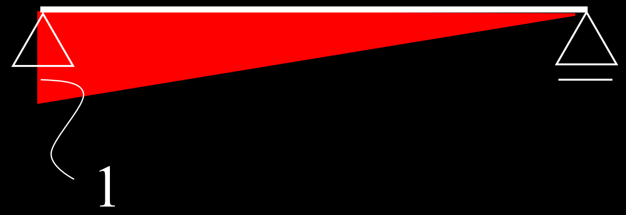


$$\phi=\frac{M}{EI}$$

ひずみ

適合系

実系

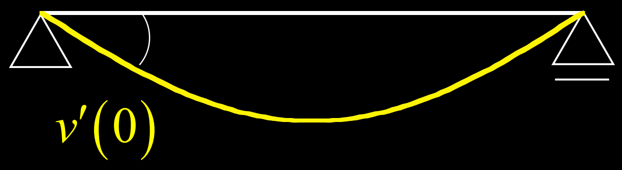


$$\overline{M}(x)=\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)+1\right\}$$

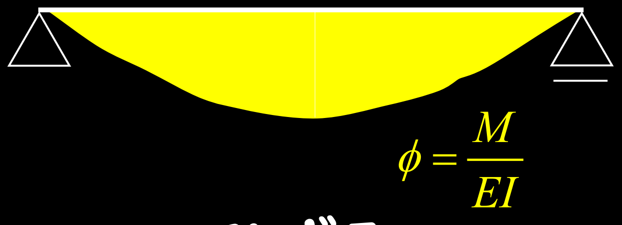
釣合系

仮想系

例題2　単位仮想荷重法（たわみ角の算定）2



たわみ

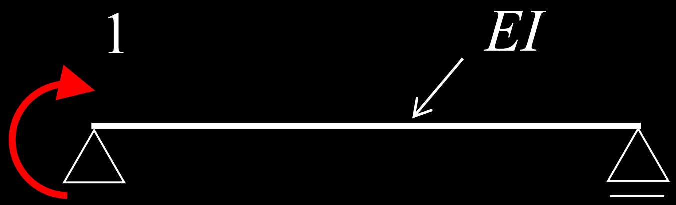


ひずみ

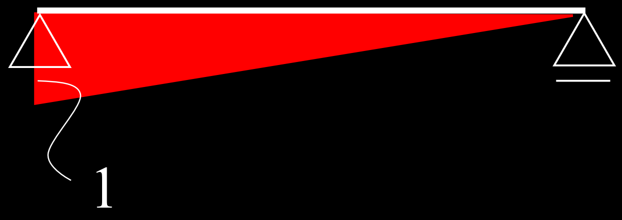
$$M(x) = -\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

適合系

実系



単位仮想荷重を作用



$$\overline{M}(x) = \left\{-\left(\frac{x}{l}\right)+1\right\}$$

釣合系

仮想系

$$v'(0) = \int_0^l \frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

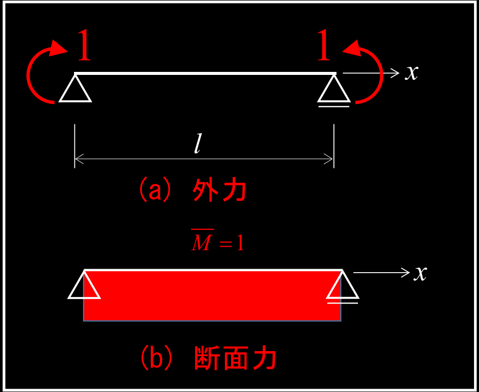
$$= \int_0^l \frac{\left[-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)\right\}\right]\cdot\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)+1\right\}}{EI}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\left\{-\frac{wl^2}{2}\left(\xi^2 - \xi\right)\right\}\cdot\left(-\xi+1\right)}{EI}l\,d\xi$$

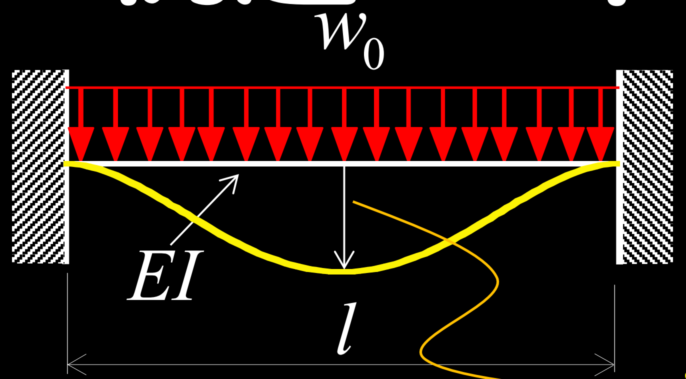
$$= -\frac{wl^3}{2EI}\int_0^1\left(-\xi^3 + 2\xi^2 - \xi\right)d\xi$$

$$= \frac{wl^3}{24EI}$$

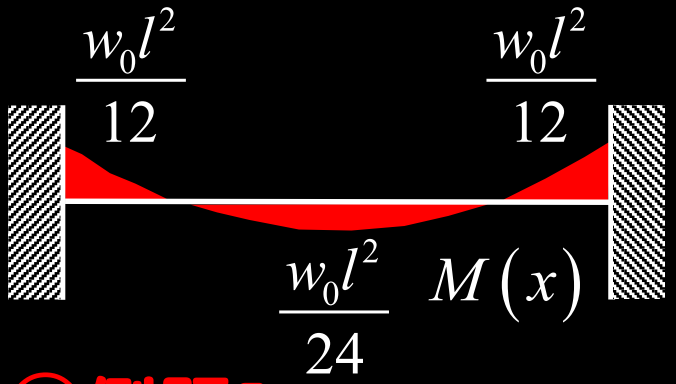
⑤例4



例題3　単位仮想荷重法 1　(釣合系1)



$$\delta \equiv v\left(\frac{l}{2}\right)$$

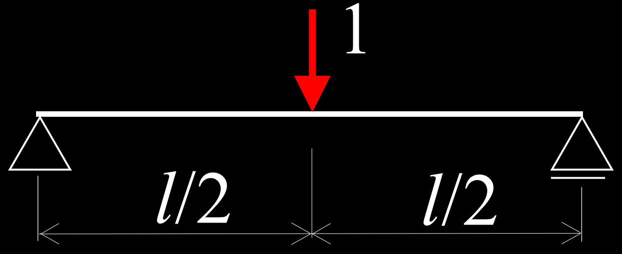


②例題5

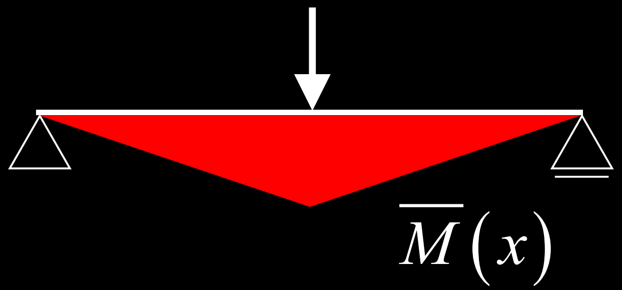
$$M(x) = -\frac{w_0 l^2}{12}\left\{6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right\}$$

$$= -\frac{w_0 l^2}{12}\left(6\xi^2 - 6\xi + 1\right)$$

1)



単位仮想荷重を作用



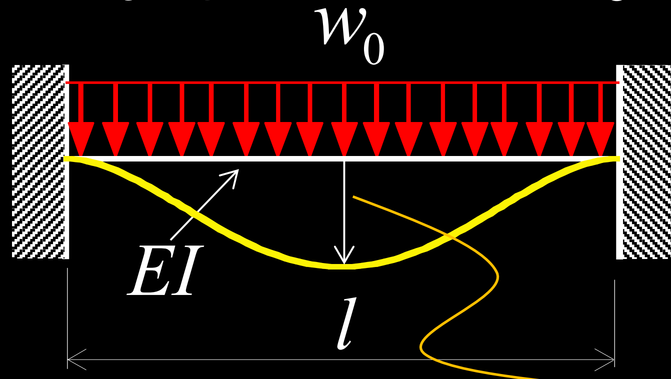
釣合系

$$\overline{M}(x) = \frac{x}{2} = \frac{l}{2}\cdot\frac{x}{l} \equiv \frac{l}{2}\xi$$

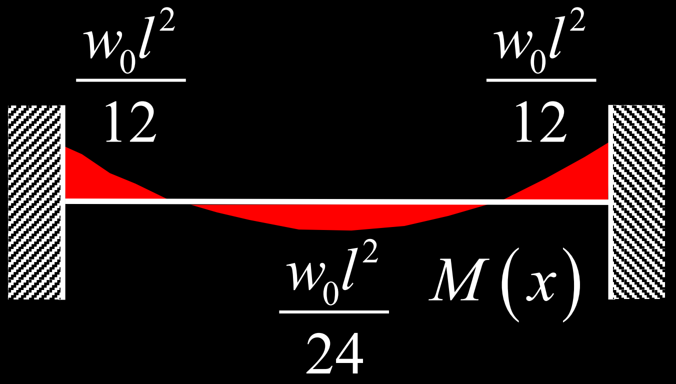
$$\left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{w_0 l^2}{12}\left(6\xi^2 - 6\xi + 1\right)\cdot\frac{l}{2}\xi}{EI} l\,d\xi = \frac{w_0 l^4}{384EI}}$$

例題3　単位仮想荷重法 2　(釣合系2)



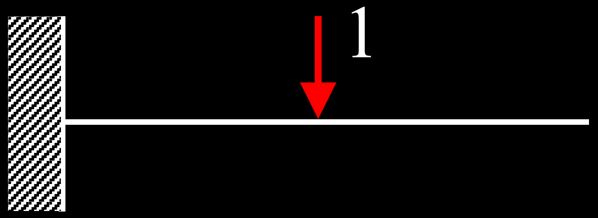
$\delta \equiv v\left(\dfrac{l}{2}\right)$



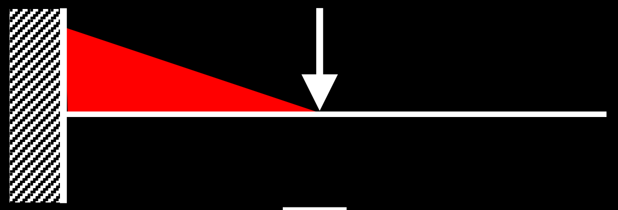
$$M(x) = -\frac{w_0 l^2}{12}\left\{6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right\}$$

$$= -\frac{w_0 l^2}{12}\left(6\xi^2 - 6\xi + 1\right)$$

2)



単位仮想荷重を作用



$\overline{M}(x)$

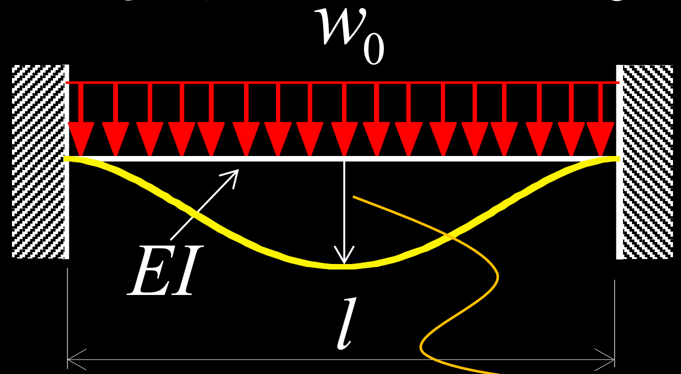
釣合系

$$\overline{M}(x) = -\frac{l}{2} + x \equiv \frac{l}{2}(2\xi - 1) \quad \left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right)$$

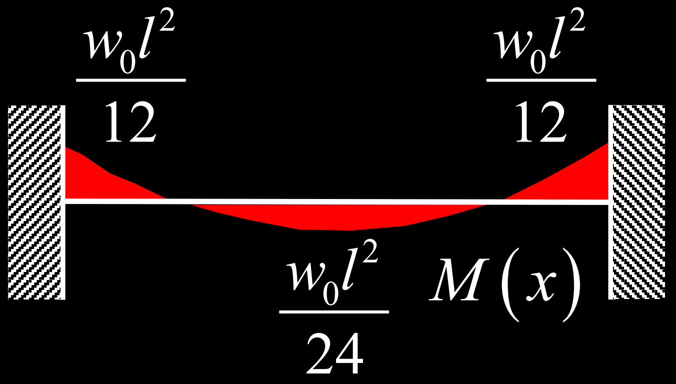
$$\overline{M}(x) = 0 \quad \left(\frac{l}{2} \le x \le l\right)$$

$$\boxed{\delta = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\dfrac{w_0 l^2}{12}\left(6\xi^2 - 6\xi + 1\right)\cdot\dfrac{l}{2}(2\xi - 1)}{EI} l\,d\xi = \frac{w_0 l^4}{384EI}}$$

例題3　単位仮想荷重法 3　(釣合系3)



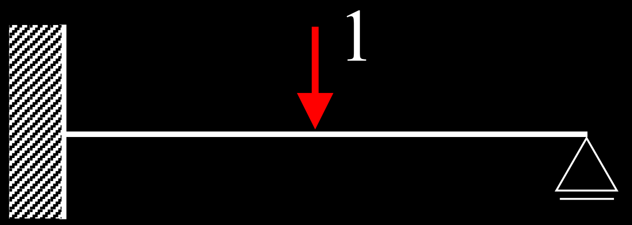
$$\delta \equiv v\left(\frac{l}{2}\right)$$

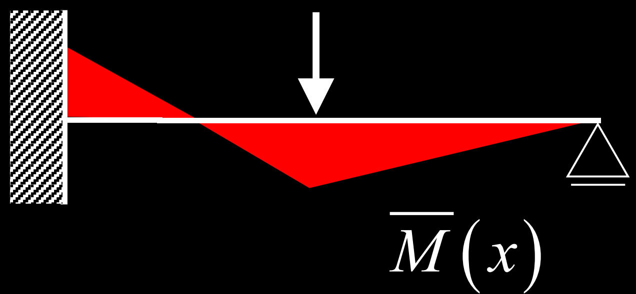


$$M(x) = -\frac{w_0 l^2}{12}\left\{6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right\}$$

$$= -\frac{w_0 l^2}{12}\left(6\xi^2 - 6\xi + 1\right)$$

3)





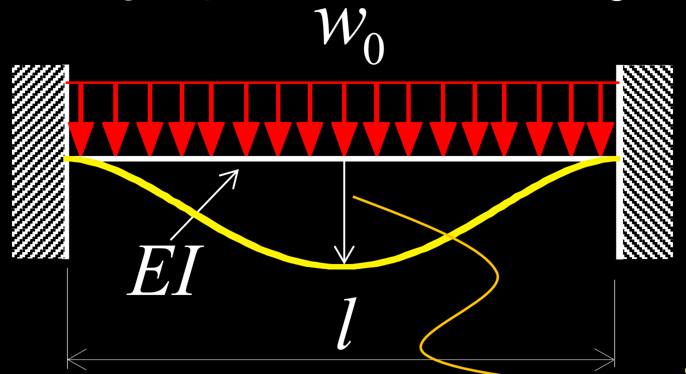
単位仮想荷重を作用

$$\overline{M}(x) = \frac{1}{16}(-3l + 11x) \equiv \frac{l}{16}(-3 + 11\xi) \quad \left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right)$$

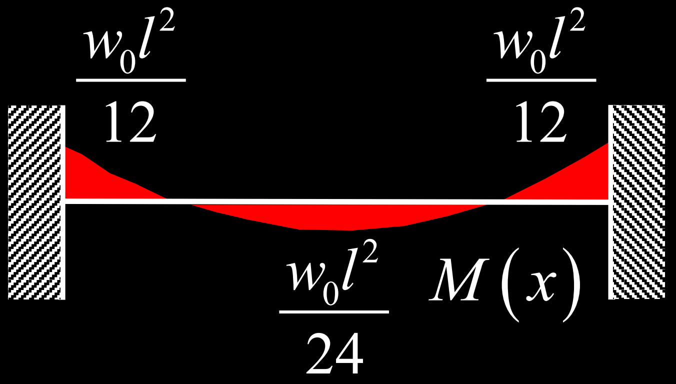
$$\overline{M}(x) = \frac{5}{16}(l - x) \equiv \frac{5l}{16}(1 - \xi) \quad \left(\frac{l}{2} \le x \le l\right)$$

$$\boxed{\delta = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{w_0 l^2}{12}\left(6\xi^2 - 6\xi + 1\right)\cdot\frac{l}{16}(-3 + 11\xi)}{EI} l\,d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{-\frac{w_0 l^2}{12}\left(6\xi^2 - 6\xi + 1\right)\cdot\frac{5l}{16}(1 - \xi)}{EI} l\,d\xi = \frac{w_0 l^4}{384EI}}$$

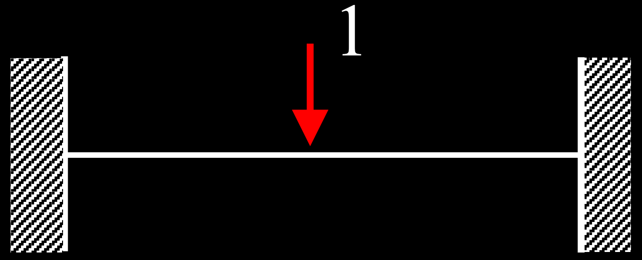
例題3　単位仮想荷重法 4　（釣合系4）



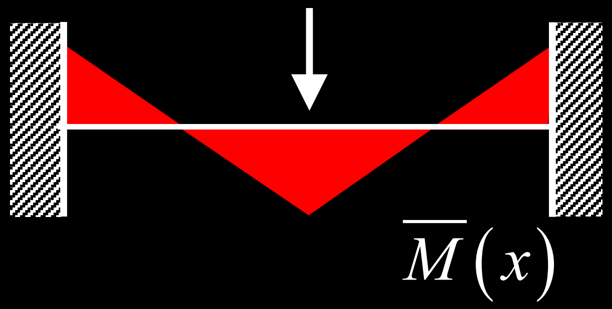
$\delta \equiv v\left(\frac{l}{2}\right)$



4）



単位仮想荷重を作用



$$\overline{M}(x) = -\frac{l}{8} + \frac{x}{2} \equiv \frac{l}{8}(4\xi - 1)$$

$$\left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right)$$

$$M(x) = -\frac{w_0 l^2}{12}\left\{6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right\}$$

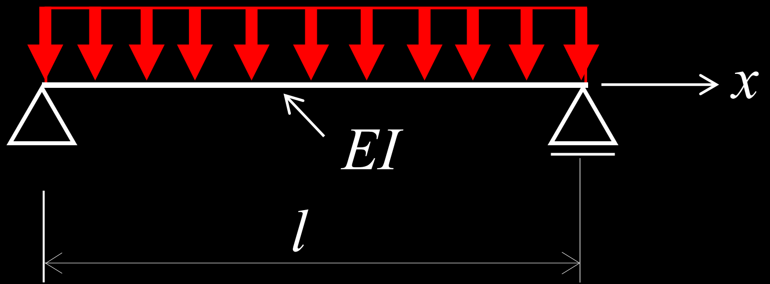
$$= -\frac{w_0 l^2}{12}(6\xi^2 - 6\xi + 1)$$

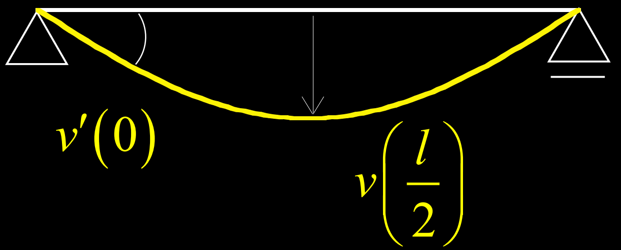
$$\boxed{\delta = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{w_0 l^2}{12}(6\xi^2 - 6\xi + 1)\cdot\frac{l}{8}(4\xi - 1)}{EI} l\,d\xi = \frac{w_0 l^4}{384EI}}$$

例題4　単位仮想荷重法 1

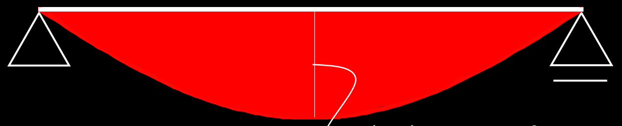
釣合系と適合系で幾何学的境界条件が異なる場合

等分布荷重 w





たわみ

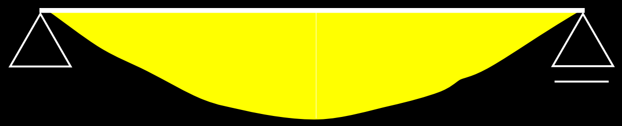


$$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{wl^2}{8}$$

②例題3

$$M(x)=-EIv''(x)=-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

曲げモーメント図

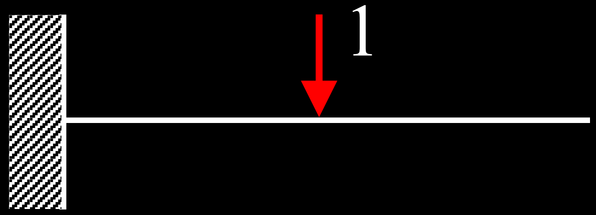


$$\phi=\frac{M}{EI}$$

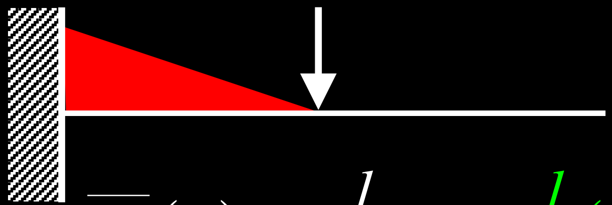
ひずみ

釣合系　適合系

実系



単位仮想荷重を作用



$$\overline{M}(x)=-\frac{l}{2}+x\equiv\frac{l}{2}(2\xi-1)\quad\left(0\le x\le\frac{l}{2}\right)$$

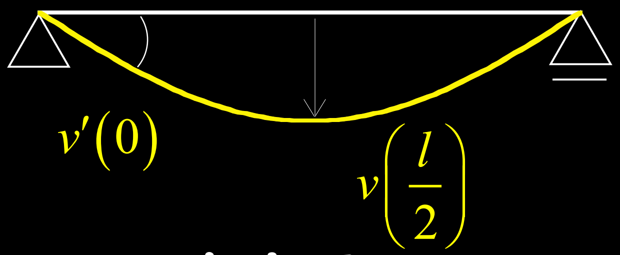
$$\overline{M}(x)=0\quad\left(\frac{l}{2}\le x\le l\right)$$

釣合系

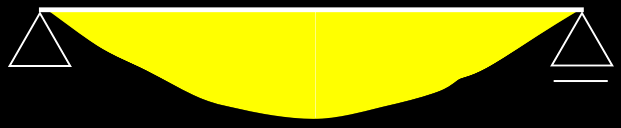
仮想系

例題4　単位仮想荷重法 2

釣合系と適合系で幾何学的境界条件が異なる場合



たわみ



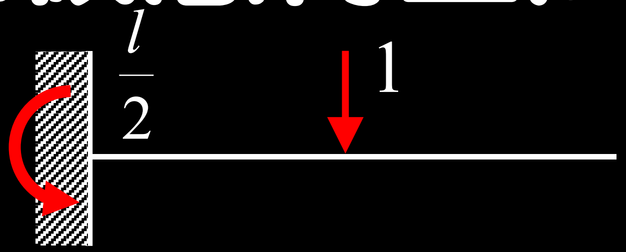
$$\phi=\frac{M}{EI}$$

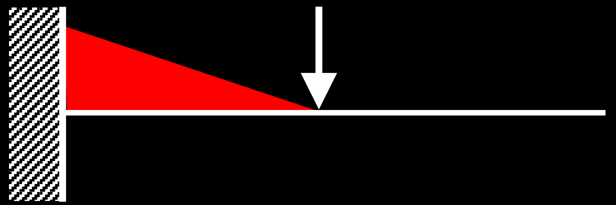
ひずみ

$$M(x)=-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

適合系

実系





$$\overline{M}(x)=-\frac{l}{2}+x\equiv\frac{l}{2}(2\xi-1)\qquad\left(0\le x\le\frac{l}{2}\right)$$

$$\overline{M}(x)=0\qquad\left(\frac{l}{2}\le x\le l\right)$$

釣合系

仮想系

$$1\cdot v\left(\frac{l}{2}\right)-\frac{l}{2}\cdot v'(0)=\int_0^l\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\left[-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}\right]\cdot\frac{l}{2}(2\xi-1)}{EI}dx$$

$$=-\frac{wl^4}{4EI}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\xi^2-\xi\right)\right\}\cdot(2\xi-1)d\xi$$

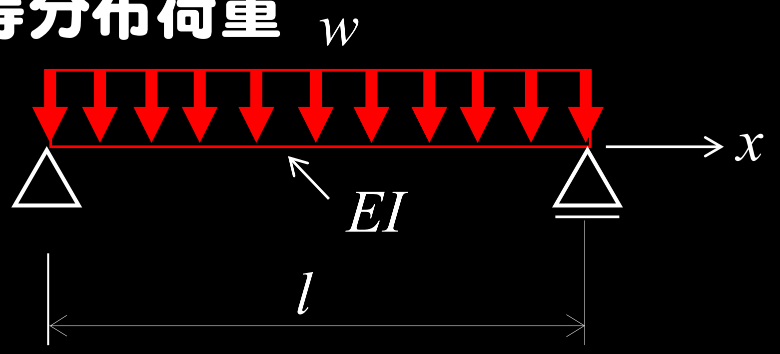
$$=-\frac{wl^4}{4EI}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2\xi^3-3\xi^2+\xi\right)d\xi$$

$$=-\frac{wl^4}{128EI}=-\frac{3wl^4}{384EI}$$

例題4　単位仮想荷重法 3

釣合系と適合系で
幾何学的境界条件が異なる場合

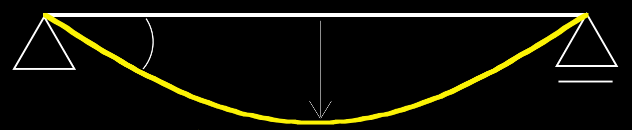
等分布荷重



$$\boxed{1\cdot v\left(\frac{l}{2}\right)-\frac{l}{2}\cdot v'(0)=-\frac{wl^4}{128EI}=-\frac{3wl^4}{384EI}}$$

$$左辺=1\cdot v\left(\frac{l}{2}\right)-\frac{l}{2}\cdot v'(0)=1\cdot\frac{5wl^4}{384EI}-\frac{l}{2}\cdot\frac{wl^3}{24EI}$$

$$=-\frac{3wl^4}{384EI}=右辺$$



$$v'(0)=\frac{wl^3}{24EI}\qquad v\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{5wl^4}{384EI}$$

②例題3

$$v(x)=\frac{wl^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

$$v'(x)=\frac{wl^3}{24EI}\left\{4\left(\frac{x}{l}\right)^3-6\left(\frac{x}{l}\right)^2+1\right\}$$

まとめ

1） ダイバージェンスの定理で，線形の
の断面力ーひずみ関係を与える

2） 釣合系　←　単位1の外力を作用

3） 適合系　←　実際の外力による変位

4） 変位（たわみ角）を求めたい点に求めたい方向に単位1の力（モーメント）を作用させ，ダイバージェンスの定理式を記述する

5） 基本は，単位仮想荷重を作用させる釣合系の幾何学的境界条件は，適合系の幾何学的境界条件と同じにする

次の解説について

⑦ 相反定理を解説します.

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．

仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス，梁，骨組
鹿島出版会 2019年9月